Усенко Людмила Викторовна,

учитель математики высшей категории

гимназии №1 г. Сочи

Решение задач повышенного уровня по геометрии методом координат.

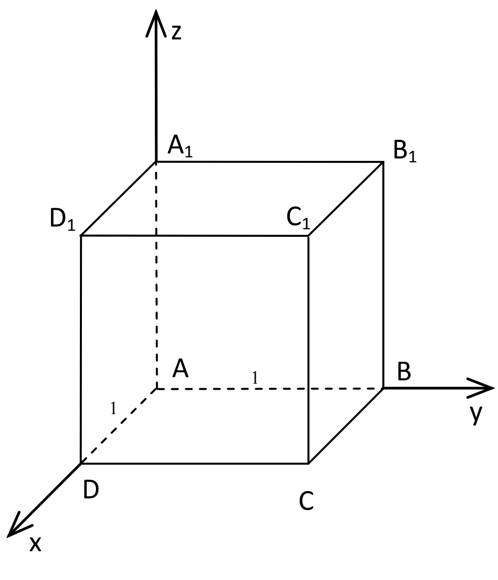
Эта методическая разработка по решению задач повышенного уровня методом координат может помочь выпускникам при подготовке к единому государственному экзамену по геометрии. В разработке показано применение четырех формул: нахождения расстояния от точки до плоскости, угла между прямыми, угла между прямой и плоскостью, угла между двумя плоскостями при решении различных задач.

Решая задачи методом координат по этим формулам, надо учитывать: **за угол между прямыми, прямой и плоскостью или между плоскостями принимается наименьший из полученных углов при пересечении прямых, прямой и плоскости или плоскостей.**

Задача 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABD и CAD_1.

Решение.

Поместим куб в прямоугольную декартовую систему координат, как показано на рисунке.



1. Z=0 -уравнение плоскости ABD, $\vec{n_1}(0,0,1)$ -вектор нормали этой плоскости.
2. A(0,0,0) и C(1,1,0),если считать длину ребра куба равной 1, $D_1(1,0,1)$.
3. ax+by+cz+d=0 - уравнение плоскости (1). По этой формуле составим уравнение плоскости CAD_1.

4. Так как точка A(0,0,0) принадлежит плоскости, то a·0+b·0+c·0+d=0,то есть d=0. Точка C(1,1,0) принадлежит плоскости, то a+b+d=0. Точка D_1(1,0,1) принадлежит плоскости, то a+c+d=0.
5. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} d = 0, \\ a + b + d = 0, \\ a + c + d = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 0, \\ b = -a, \\ c = -a. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение плоскости (1), получим ax-ay-az=0,

x-y-z=0 - уравнение плоскости CAD_1, $\vec{n_2}(1,-1,-1)$ - вектор нормали этой плоскости.

По формуле

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c\ |}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}},$$

где φ- острый угол между плоскостями, $\vec{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ и $\vec{n_2}(a_2, b_2, c_2)$ - векторы нормалей плоскостей, находим:

$$\cos\varphi = \frac{|-1|}{\sqrt{1}\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$1 + tg^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} = 3,$$

$$tg^2\varphi = 2,$$

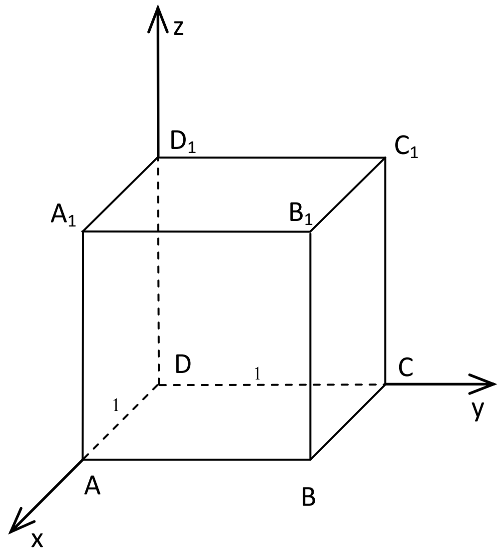
$$tg\varphi = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 2. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки D до плоскости CAD_1.

Решение.

Решим задачу методом координат. Расположим единичный куб (куб, ребро которого равно 1) в трехмерную декартовую систему координат так как на рисунке.



D(0,0,0), C(0,1,0),A(1,0,0),D_1(0,0,1).

ax+by+cz+d=0- уравнение плоскости. По этой формуле составим уравнение плоскости CAD_1.

Если точка C(0,1,0) принадлежит плоскости, то b+d=0.

Если точка A (1,0,0) принадлежит плоскости, то a+d=0.

Если точка D_1 (0,0,1) принадлежит плоскости, то c+d=0.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} b+d=0, \\ a+d=0, \\ c+d=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-d, \\ a=-d, \\ c=-d. \end{cases}$$

Подставив в формулу ax+by+cz+d=0, получим: -dx-dy-dz+d=0 , x+y+z-1=0 - уравнение плоскости CAD_1.

По формуле $h=\frac{|ax+by+cz|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,

где M(x,y,z) заданная точка, a, b, c, d - коэффициенты уравнения плоскости, h - расстояние от точки до плоскости,

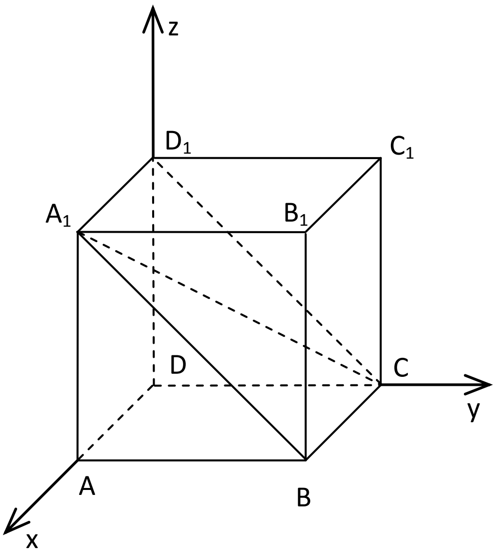
получим: $h=\frac{|-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. - расстояние от точки D до плоскости CAD_1.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 3. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между прямыми AD и CA_1 .

Решение.

Рассмотрим единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в прямоугольной декартовой системе координат, как показано на рисунке.



Прямые AD и CA_1 скрещиваются. $AD \| A_1D_1$, значит, $AD \| (A_1D_1C)$. Расстояние от точки D до плоскости A_1D_1C и является искомым расстоянием между прямыми AD и CA_1 и его можно вычислить по формуле,

$$h = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

где M(x,y,z) заданная точка, a, b, c, d - коэффициенты уравнения плоскости, h - расстояние от точки до плоскости.

D(0,0,0), A_1(1,0,1), D_1(0,01), C(0,1,0).

ax+by+cz+d=0- уравнение плоскости.

Так как точка A_1 (1,0,1) принадлежит плоскостиA_1D_1C, то a+c+d=0.

Так как точка D_1 (0,0,1) принадлежит плоскостиA_1D_1C, то c+d=0.

Так как точка C (0,1,0) принадлежит плоскостиA_1D_1C, то b+d=0.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ b + d = 0, \\ c + d = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -d, \\ a = 0, \\ c = -d. \end{cases}$$

-dy-dz+d=0,

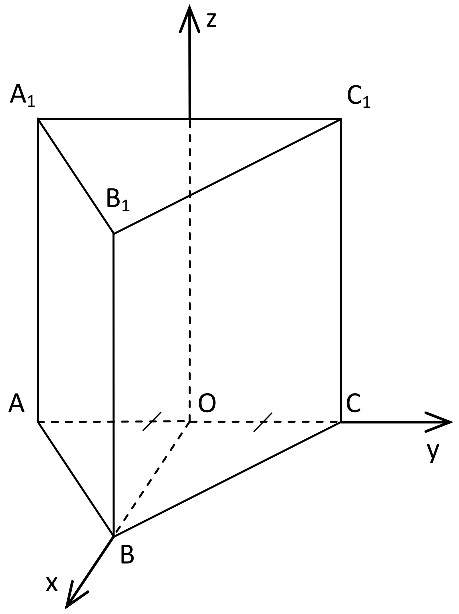
y+z-1=0 - уравнение плоскости A_1D_1C, значит:

$$h = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ - искомое расстояние.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4.В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1.

Решение.



Рассмотрим правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ в прямоугольной декартовой системе координат так, как на рисунке.

OB - высота и медиана равностороннего треугольника ABC.

$OB = AB\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; AB=1, ;$OB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $AO = OC = \dfrac{1}{2}$.

Координаты нужных точек :

$A(0,-\dfrac{1}{2},0)$, $C_1(0,\dfrac{1}{2},1)$, $B(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0)$, $C(0,\dfrac{1}{2},0)$.

Угол между прямой и плоскостью находится по формуле

$\sin\varphi = \dfrac{|x_1 a + y_1 b + z_1 c|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, где $\overrightarrow{n_1}(x_1, y_1, z_1)$ - вектор прямой и $\overrightarrow{n_2}(a,b,c)$ - векторы нормали плоскости.

$\overrightarrow{AC_1}(0,1,1)$ - вектор прямой

ax+by+cz+d=0-уравнение плоскости.

$B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$, поэтому $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a + d = 0$,

$C\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$, $\dfrac{1}{2}b + d = 0$,

$C_1\left(0,\dfrac{1}{2},1\right)$, $\dfrac{1}{2}b + c + d = 0$.

Решая систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{2}a + d = 0, \\ \dfrac{1}{2}b + d = 0, \\ \dfrac{1}{2}b + c + d = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}d, \\ b = -2d, \\ c = 0. \end{cases}$$

$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}dx - 2dy + d = 0$,

$2x + 2\sqrt{3}y - \sqrt{3}d = 0$ - уравнение плоскости BCC_1, $\vec{n}(2,2\sqrt{3},0)$ - вектор нормали плоскости.

$$\sin\varphi = \frac{\left|0\cdot 2+1\cdot 2\sqrt{3}+1\cdot 0\right|}{\sqrt{0+1+1}\sqrt{4+12+0}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi},$$

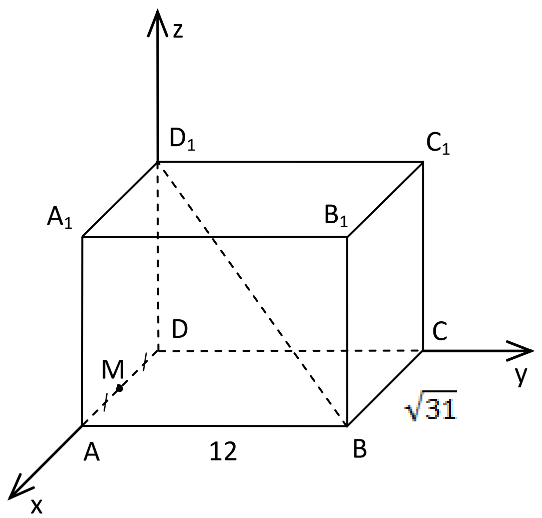
$$\cos\varphi = \sqrt{1-\frac{6}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Задача 5.Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$- прямоугольник ABCD, в котором AB=12, AD=$\sqrt{31}$. Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

Решение.

Расположим данную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в прямоугольной декартовой системе координат как показано на рисунке.



Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5. Прямые AC и B_1D_1 скрещиваются и лежат в параллельных плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$, поэтому расстояние между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$ равно 5, т.е. BB_1=5.

Плоскость основания призмы - (ADC), задается уравнением z=0, $\vec{n}(0,0,1)$ - вектор нормали этой плоскости.

$\overrightarrow{BD_1}$ перпендикулярен второй плоскости, проходящей через середину ребра AD точку M.

$\overrightarrow{BD_1}$ -вектор нормали второй плоскости. $B(\sqrt{31},12,0)$, $D_1(0,0,5)$.

$$\overrightarrow{BD_1}(-\sqrt{31},-12,5).$$

По формуле $\cos\varphi = \frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$,

где φ- острый угол между плоскостями,

$\overrightarrow{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(a_2, b_2, c_2)$ - векторы нормалей плоскостей, находим:

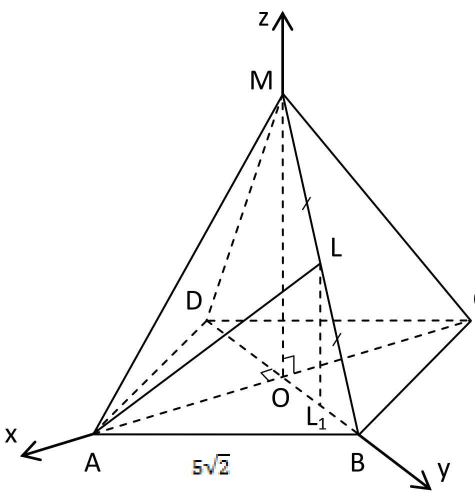
$$\cos\varphi = \frac{\left|0\cdot(-\sqrt{31}) + 0\cdot(-12) + 5\cdot 1\right|}{\sqrt{0+0+1}\sqrt{31+144+25}} = \frac{5}{\sqrt{200}} = \frac{5}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задача 6. Дана правильная четырехугольная пирамида MABCD, все ребра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Угол между прямыми DM и AL, где L - середина ребра BM, равен α, $tg\alpha = \sqrt{2}$. Найдите высоту данной пирамиды.

Решение.

Рассмотрим правильную пирамиду MABCD в трехмерной декартовой системе координат, как на рисунке.



ABCD - квадрат, $BD = AB\sqrt{2}$, $BD=10$, $OB = \frac{1}{2}BD$, $AO=OB=5$.

OM - высота пирамиды, $LL_1 \perp OB$, ML=BL, $LL_1 \| MO$, LL_1 - средняя линия треугольника OBM.

Пусть OM=x, тогда $LL_1 = \frac{x}{2}$, x>0.

D(0,-5,0), M(0,0,x) $\overrightarrow{DM}(0,5,x)$.

A(5,0,0), $L\left(0, \frac{5}{2}, \frac{x}{2}\right)$ $\overrightarrow{AL}\left(-5, \frac{5}{2}, \frac{x}{2}\right)$.

α - угол между прямыми DM и AL.

$tg\alpha = \sqrt{2}$, $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + 2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$,

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (α- острый угол).

$$\cos\alpha = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ -векторы на прямых.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\left|-5\cdot 0+\frac{5}{2}\cdot 5+x\cdot\frac{x}{2}\right|}{\sqrt{0^2+25+x^2}\sqrt{25+\frac{25}{4}+\frac{x^2}{4}}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{(25+x^2)\cdot 2}{2\sqrt{25+x^2}\sqrt{125+x^2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{25+x^2}{125+x^2}},$$

$\frac{25+x^2}{125+x^2}=\frac{1}{3}$, $125+x^2=75+3x^2$, $2x^2=50$, $x^2=25$, $x=\pm5$, но $x>0$, $x=5$.

Ответ: 5.

Список используемой литературы:

1.**ЕГЭ***2014. Математика. 30 вариантов комплектов типовых текстовых заданий 800 заданий части 2(С)/ И.Р.Высоцкий, П,И,Захаров, В.С.Панферов, С.Е.ПОсицельский, А.В.Семенов, М.А.Семенова, И.Н.Сергеев, В.А.Смирнов, С.А.Шестаков, Д.Э.Шноль, И.В.Ященко;* ***под ред. А.Л.Семенова, И.В.Ященко****.-М.: Издательство «Экзамен», 2014.-216 с.(Серия «ЕГЭ.30 вариантов. Типовые тестовые задания»),ISBN 078-5-377-07945-3*

2.Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.М.Смирнова, В.А.Смирнов.-7-е изд., стер.- М. : Мнемозина, 2013.- 376 с. : ил. ISDN 978-5-346-02293-0

3.Геометрия.10-11 классы : учеб. для учащихся общеобразоват. Учреждений (базовый уровень)/ И.М.Смирнова.-4-е изд., стер.- М. : Мнемозина, 2011.- 223с. : ил. ISBN 978-5-346-01676-2