**Методы решения задач с экономическим содержанием**

*Габрелян А.Г., учитель*

*математики СОШ №4*

В контрольно-измерительных материалах единого государственного экзамена по профильной математике задание 17, проверяющее у выпускников сформированность умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, на протяжении последних лет представлено **текстовой задачей с экономическим содержанием на кредиты.** Задача повышенного уровня сложности оценивается в **3 балла**. Для выполнения этого задания нужно составить математическую модель по тексту задачи.

Экономические задачи на кредиты, представленные разработчиками КИМ ЕГЭ, можно классифицировать на 3 типа:

* задачи с аннуитетными платежами;
* задачи с дифференцированными платежами;
* задачи с заданной схемой платежа.

**Аннуитетный платёж –** это **т**акая система выплат, при которой кредит выплачивается равными платежами.

**Дифференцированные платёж -** это способ погашения кредита, при котором заемщик выплачивает сумму основного долга кредита равными долями, а проценты начисляются лишь на остаток задолженности.

Каждый раз клиент платит набежавшие проценты за 1 период и 1/n часть основного долга, где n – период, на который взят кредит (количество месяцев, лет). При такой схеме платежа наибольший платёж – первый, наименьший – последний.

**Задачи с заданной схемой платежа –** платежи чётко оговариваются в условии задачи.

Решение экономических задач на кредиты, как и любой текстовой задачи, складывается из нескольких основных этапов.

**1 этап - распознать тип задачи, прочитав условие задачи.**

* Ключевая фраза при аннуитетной схеме платежа: **долг выплачен равными платежами.**
* Ключевая фраза при дифференцированном платеже: «в такой-то период **долг должен быть на** **одну и ту же величину меньше долга предыдущего периода»**.
* Взадачах с заданной схемой платежа даётся таблица, согласно которой происходят выплаты.

**2 этап** -    **выбор переменных.**

Условия задач содержат многозначные числа, поэтому целесообразно введение переменных и решение задач в общем виде, а на последнем шаге, произвести замену соответствующих переменных их цифровыми значениями. Например, можно воспользоваться следующими обозначениями:

* S – сумма кредита
* r% - годовые (ежемесячные) проценты
* b=1+0,01r – коэффициент
* х – ежегодная (ежемесячная) выплата
* n – платежный период

Особое внимание следует уделить отработке с учащимися значения коэффициента b, который показывает, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов.

**3 этап – составление таблицы**. Для каждого типа задачи своя таблица.

Таблица для задач с аннуитетной схемой выплаты:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Год (месяц)** | **Долг с %** | **Выплата** | **Долг после выплаты** |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x | Sb-x |
| 2 год | (Sb-x)b=Sb2-xb | x | Sb2-xb-x |
| 3 год | (Sb2-xb-x)b=Sb3-x b2-xb | x | Sb3-x b2-xb-x |
| 4 год | (Sb3-x b2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb | x | Sb4-xb3-xb2-xb-x |
| 5 год | (Sb4-xb3-xb2-xb-x)b= Sb5-xb4-xb3-xb2-xb | x | Sb5-xb4-xb3-xb2-xb-x |
| 6 год | (Sb5-xb4-xb3-xb2-xb-x)b= Sb6-xb5-xb4-xb-3xb2-xb | x | Sb6-xb5-xb4-xb-3xb2-xb-x |
|  |  |  |  |
| n год | Sbn-xbn-1-xbn-2-…-xb2-xb | x | Полная выплата, долг равен 0 (меньше 0) |

Таблица для задач  **на кредиты с дифференцированной схемой платежа**:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Год (месяц)** | **Долг с %** | **Выплата** | **Долг после выплаты** |
| 0 |  |  | S |
| 1 | Sb | Sb - (n-1)S  n | (n-1)S  n |
| 2 | (n-1)Sb  n | (n-1)Sb - (n-2)S  n n | (n-2)S  n |
|  |  |  |  |
| n-1 | 2Sb  n | 2Sb \_ S  n n | S  n |
| n | Sb  n | Sb  n | 0 |

**4 этап** -  **составление уравнений и неравенств.** При составлении уравнений необходимо уделить внимание единицам измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин.

**5 этап** - **решение полученного уравнения, неравенства или системы.**

**6 этап** - **исследование полученного результата и нахождение ответа** на поставленный вопрос задачи.

**Рассмотрим примеры решения задач.**

1. ***Задача c ануитетной схемой выплаты.***

31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк *X* рублей. Какой должна быть сумма *X*, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Пусть *S= 6902000 руб. – сумма кредита*

*r=12,5 % - процент банка*

*b= 1+r/100=1+0,125=1,125=9/8 – коэффициент*

*n=4*

*x руб.-ежегодная выплата*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Год** | **Долг с %** | **Выплата** | **Долг после выплаты** |
| 0 |  |  | S |
| 1 год | Sb | x | Sb-x |
| 2 год | (Sb-x)b=Sb2-xb | x | Sb2-xb-x |
| 3 год | (Sb2-xb-x)b=Sb3-x b2-xb | x | Sb3-x b2-xb-x |
| 4 год | (Sb3-x b2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb | x | Sb4-xb3-xb2-xb-x |

*По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому составим уравнение:*

;



*x= 2 296 350 (руб.)*

*Ответ:2 296 350 руб.*

1. ***Задача с дифференцированной схемой выплаты.***

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть *S -сумма кредита*

*r- % - процент банка*

*b= 1+r/100 – коэффициент*

*n=19*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **месяц** | **Долг с процентом** | **Выплата** | **Остаток долга** |
| **0** |  |  |  |
| **1** | Sb | Sb -18/19 S | 18/19 S |
| **2** | 18/19 Sb | 18/19 Sb – 17/19 S | 17/19 S |
|  |  |  |  |
| **18** | 2/19 Sb | 2/19 Sb - 1/19S | 1/19S |
| **19** | 1/19S | 1/19Sb | 0 |

*Зная, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит, составим уравнение:*

(Sb/19)⋅(19+18+…+1) – (S/19)⋅(18+17+…+1) =1,3 S

10 Sb – 9=1,3

b= 1,03



r=3%

*Ответ 3 %*

1. ***Задача с заданной схемой платежа.***

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на *r* процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где *r* — целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата** | **15.01** | **15.02** | **15.03** | **15.04** | **15.05** | **15.06** | **15.07** |
| Долг (в млн рублей) | 1 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0 |

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение.  
Пусть *1млн руб. -сумма кредита  
r- % - процент банка, целое число  
b= 1+r/100 – коэффициент*

*n=6*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***месяц*** | ***Долг с процентом***  ***млн руб*** | ***Выплата***  ***млн руб*** | ***Остаток долга***  ***млн руб*** |
| ***0*** |  |  | *1* |
| ***1*** | *1b* | *b-0,6* | *0,6* |
| ***2*** | *0,6 b* | *0,6 b - 0,4* | *0,4* |
| ***3*** | *0,4 b* | *0,4 b - 0,3* | *0,3* |
| ***4*** | *0,3 b* | *0,3 b – 0,2* | *0,2* |
| ***5*** | *0,2 b* | *0,2 b – 0,1* | *0,1* |
| ***6*** | *0,1 b* | *0,1b* | *0* |

*Зная, что общая сумма выплат после полного погашения кредита будет меньше 1,2 млн рублей составлю неравенство:*

*B (1+ 0,6 + 0,4+ 0,3 +0,2 + 0,1) – (0,6 + 0,4+ 0,3 +0,2 + 0,1) < 1,2;*

*2,6b -1,6<1,2;*

*2,6 b<2,8;* ;

; ; ; 

*т. к. r – целое число, то*

*r=7%*

*Ответ: 7*

***Задачи на закрепление по каждому из типов экономических задач.***

|  |  |
| --- | --- |
| Задачи с аннуитетной схемой выплаты | В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:  — каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;  — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 рубль.  Сколько рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами ( то есть за три года)? (Ответ: 124 809 100 рублей) |
| 1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей? (Ответ: на 9 месяцев) |
| Ольга хочет взять в кредит 100 000 рублей под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 тысяч рублей? (Ответ: 6) |
| Задачи с дифференцированной схемой выплаты | Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?  Ответ: 822 тыс. рублей |
| Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила сумма, уплаченная Сергеем банку сверх кредита?  Ответ: 60 |
| 15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:  — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;  — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;  — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.  Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?  *Ответ:* 119%. |
| **Задачи с заданной схемой платежа** | В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *S* млн рублей, где *S* — целое число. Условия его возврата таковы:  — каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;  — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;  — в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей     |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Месяц и год | Июль 2019 | Июль 2020 | Июль 2021 | Июль 2022 | | Долг  (в млн рублей) | *S* | 0,7*S* | 0,3*S* | 0 |     Найдите наименьшее *S*, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн. руб.  *Ответ: 8* |
| 15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.     |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **Дата** | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 | | **Долг (в процентах от кредита)** | 100% | 90% | 80% | 70% | 60% | 50% | 0% |     В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?  *Ответ:* 22,5. |
| В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *S* млн рублей, где *S* — целое число. Условия его возврата таковы:  — каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;  — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;  — в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей     |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | Месяц и год | Июль 2026 | Июль 2027 | Июль 2028 | Июль 2029 | | Долг (в млн рублей) | *S* | 0,8*S* | 0,4*S* | 0 |     Найдите наибольшее *S*, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн руб.  *Ответ:8* |

Список рекомендуемой учебно-методической литературы

1. Демоверсии, спецификация ЕГЭ -2021 (профильный уровень)
2. Открытый банк заданий [www.fipi.ru](about:blank), сайты [http://mathege.ru](about:blank); reshuege.ru.; [https://math100.ru/](about:blank) .
3. И.Я. Ященко, С.А. Шестаков. Модульный курс «Я сдам ЕГЭ». Математика. ЕГЭ 2018 . Профильный уровень в трех частях. Москва: Просвещение, 2018.